



Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie 2010

Clasa a XII-a

Barem de evaluare

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	Relația din ipoteză $\Leftrightarrow x \cdot y^2 - x \cdot y = y^2 \cdot x - y \cdot x, \forall x, y \in A (*)$.	2p
	În (*) substituim pe y cu $-y$ și conform regulilor de calcul într-un inel obținem $x \cdot y^2 + x \cdot y = y^2 \cdot x + y \cdot x, \forall x, y \in A (**)$.	2p
	Din (*),(**) și regulile de calcul într-un grup se obține $x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in A$	3p
2.	Compunerea funcțiilor este lege de compoziție internă pe mulțimea F deoarece $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \in G$ pentru că produsul a două elemente din G aparține tot lui G . Compunerea funcțiilor este, în general, asociativă, iar funcția identică $1_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}}(x) = x, (\forall) x \in \mathbb{R}$ este din mulțimea F și este element neutru în raport cu operația de compunere a funcțiilor.	3p
	Cum funcția $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux, atunci $f'(x) > 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$ sau $f'(x) < 0, (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Rightarrow f$ este strict monotonă $\Rightarrow f$ este injectivă. Funcția f este și surjectivă, rezultă că f este bijectivă, deci inversabilă.	2p
	Cum derivata funcției f nu se anulează atunci f^{-1} este derivabilă și pentru fiecare y , $(f^{-1})'_{(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \in G, \text{ deoarece } f'(f^{-1}(y)) \in G \Rightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \in G$ este grup.	2p
3.	Avem că $2 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 17 \cdot x + 12 = (2 \cdot x + 3) \cdot (x^2 + 3 \cdot x + 3) + 2 \cdot x + 3$. a) Rezultă că $I_1 = \int \frac{2 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 17 \cdot x + 12}{x^2 + 3 \cdot x + 3} dx = \int \left(2 \cdot x + 3 + \frac{2 \cdot x + 3}{x^2 + 3 \cdot x + 3} \right) dx =$ $= x^2 + 3 \cdot x + \ln(x^2 + 3 \cdot x + 3) + C$	3p

	$I_2 = \int \frac{2 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 17 \cdot x + 12}{(x^2 + 3 \cdot x + 3)^2} dx = \int \left(\frac{2 \cdot x + 3}{x^2 + 3 \cdot x + 3} + \frac{2 \cdot x + 3}{(x^2 + 3 \cdot x + 3)^2} \right) dx =$ $= \ln(x^2 + 3 \cdot x + 3) - \frac{1}{x^2 + 3 \cdot x + 3} + C$	2p
	<p>b)</p> $I_n = \int \frac{2 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 17 \cdot x + 12}{(x^2 + 3 \cdot x + 3)^n} dx = \int \frac{(2 \cdot x + 3) \cdot (x^2 + 3 \cdot x + 3) + 2 \cdot x + 3}{(x^2 + 3 \cdot x + 3)^n} dx =$ $= \int \left(\frac{2 \cdot x + 3}{(x^2 + 3 \cdot x + 3)^{n-1}} + \frac{2 \cdot x + 3}{(x^2 + 3 \cdot x + 3)^n} \right) dx =$ $= -\frac{1}{n-2} \cdot \frac{1}{(x^2 + 3 \cdot x + 3)^{n-2}} - \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x^2 + 3 \cdot x + 3)^{n-1}} + C$	2p
	$b_n = \int_0^1 \left(x - x^2 + x^3 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot x^n \right) \cdot \ln(x+1) \cdot dx = \int_0^1 x \cdot \left(\frac{1 - (-x)^n}{1+x} \right) \cdot \ln(1+x) \cdot dx =$ $= \int_0^1 \frac{x}{x+1} \cdot \ln(x+1) \cdot dx + \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \cdot \ln(1+x) \cdot dx.$	2p
4.	$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1} \cdot \ln(x+1) \cdot dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} \cdot \ln(1+x) \cdot dx = \int_0^1 \ln(1+x) \cdot dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1} \cdot \ln(x+1) =$ $= \int_0^1 x' \cdot \ln(1+x) \cdot dx - \frac{\ln^2(x+1)}{2} \Big _0^1 =$ $= x \cdot \ln(1+x) \Big _0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x+1} \cdot dx - \frac{\ln^2 2}{2} =$ $= \ln 2 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} \cdot dx - \frac{\ln^2 2}{2} = \ln 2 - \int_0^1 dx + \ln(x+1) \Big _0^1 - \frac{\ln^2 2}{2} = \ln 2 - 1 + \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2} = 2 \cdot \ln 2 - 1 - \frac{\ln^2 2}{2}$	2p
	$x \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \ln(x+1) \leq \ln 2 \\ \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \frac{\ln(1+x)}{1+x} \leq \ln 2 \Rightarrow \left \frac{(-x)^{n+1} \ln(1+x)}{1+x} \right \leq \ln 2 \cdot x^{n+1}.$ <p>Rezultă că $\left \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1} \ln(1+x)}{1+x} \cdot dx \right \leq \int_0^1 \left \frac{(-x)^{n+1} \ln(1+x)}{1+x} \right \cdot dx \leq \ln 2 \cdot \int_0^1 x^{n+1} \cdot dx = \frac{\ln 2}{n+2}.$</p> <p>In concluzie, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \cdot \ln(1+x) \cdot dx = 0.$</p> <p>Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2 \cdot \ln 2 - 1 - \frac{\ln^2 2}{2}.$</p>	3p